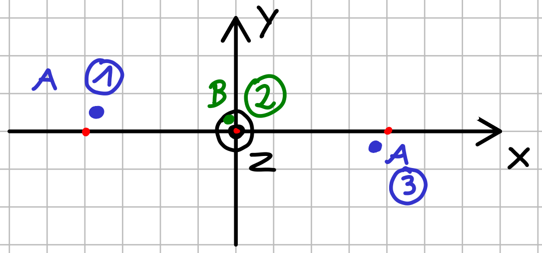
LISTA 10

$\boxed{3}$ Rozwiązanie pełne (z drganiami poprzecznymi)



• → położenia równowagi cząstek A, B i A:

cz. 1: $(-L, 0, 0)$
cz. 2: $(0, 0, 0)$
cz. 3: $(L, 0, 0)$

Wychylenia cząstek z położenia równowagi (zależą od t)

cz. 1 → (x_1, y_1, z_1) ; cz. 2 → (x_2, y_2, z_2) ; cz. 3 → (x_3, y_3, z_3)

⚠ Symetria osiowa molekuły pozwala zredukować drgania w płaszczyźnie YOZ do osi OY, zatem położenia cząstek 1, 2 i 3 to odpowiednio:

$$\bar{r}_1 = (-L + x_1, y_1) \; ; \; \bar{r}_2 = (x_2, y_2) \; ; \; \bar{r}_3 = (L + x_3, y_3) \qquad (0)$$

założenia:

1° brak translacji, czyli molekuła, jako całość, się nie przesuwa → środek masy jest nieruchomy w (0, 0)

oś OX : $m_A(-L + x_1) + m_B x_2 + m_A(L + x_3) = 0$ (1a)

oś OY : $m_A y_1 + m_B y_2 + m_A y_3 = 0$ (1b)

2° brak rotacji, czyli molekuła się nie obraca → ruch tylko w płaszczyźnie XOY → jedyne niezerowe składowe momentu pędu cząstki są równoległe do osi OZ, i wówczas

$$L_z = L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3} = 0 \qquad (2)$$

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = m\, \bar{r} \times \bar{v} = m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \rightarrow L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \quad (*)$$

↓ (0, *) i faktu, że TYLKO wychylenia zależą od czasu

$$\begin{cases} L_{z_1} = m_A\big((-L + x_1)\dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1\big) & (3a) \\ L_{z_2} = m_B\big(x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2\big) & (3b) \\ L_{z_3} = m_A\big((L + x_3)\dot{y}_3 - y_3 \dot{x}_3\big) & (3c) \end{cases}$$

małe drgania: (por. zad 1 lista 10) $\begin{cases} x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \sim \varepsilon \ll l \\ \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3 \sim \varepsilon \ll l \end{cases}$

Po połączeniu (2) i (3) zostawimy TYLKO człony liniowe z ε

Z (2) i (3) mamy $0 = m_A[\underbrace{-l\dot{y}_1}_{\sim\varepsilon} + \underbrace{x_1\dot{y}_1}_{\sim\varepsilon^2} - \underbrace{y_1\dot{x}_1}_{\sim\varepsilon^2} + \underbrace{l\dot{y}_3}_{\sim\varepsilon} + \underbrace{x_3\dot{y}_3}_{\sim\varepsilon^2} - \underbrace{y_3\dot{x}_3}_{\sim\varepsilon^2}] + m_B(\underbrace{x_2\dot{y}_2}_{\sim\varepsilon^2} - \underbrace{y_2\dot{x}_2}_{\sim\varepsilon^2})$

tylko to zostaje

i ostatecznie $0 = m_A l(\dot{y}_3 - \dot{y}_1) \rightarrow \dot{y}_1 = \dot{y}_3$ (4)

U nas, skoro $\dot{y}_1 = \dot{y}_3$, to, zgodnie z zasadami całkowania po czasie $y_1 = y_3 + C$, ale gdy cz. jest w równowadze, to $y_1 = y_3 = 0$, stąd również $C = 0$. Podsumowując: $y_1 = y_3$ (4a)

Teraz liczymy lagrangian molekuły:

a) energia kinetyczna – z (0) mamy, że

$$\dot{r}_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 \; ; \; \dot{r}_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \; ; \; \dot{r}_3^2 = \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 \quad (0')$$

Wyeliminujmy x_2 i y_2:

$\rightarrow$ z (1a) $\rightarrow x_2 = -\frac{m_A}{m_B}(x_1 + x_3)$ (5a), czyli też $\dot{x}_2 = -\frac{m_A}{m_B}(\dot{x}_1 + \dot{x}_3)$ (5a')

$\rightarrow$ z (1b) i (4a) $\rightarrow y_2 = -2\frac{m_A}{m_B}y_1$ (5b), czyli też $\dot{y}_2 = -2\frac{m_A}{m_B}\dot{y}_1$ (5b')

i wówczas

$$T = T_A + T_B + T_C \overset{(0')}{=} \frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_B}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{m_A}{2}(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) \overset{(4a, 5')}{=}$$

$$= \frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{\cancel{m_B}}{2}\frac{m_A^2}{m_B^{\cancel{2}}}[(\dot{x}_1 + \dot{x}_3)^2 + 4\dot{y}_1^2] + \frac{m_A}{2}(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_1^2) =$$

$$= \underbrace{\frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_A^2}{2m_B}(\dot{x}_1 + \dot{x}_3)^2}_{= T_X \text{ (6a)}} + \underbrace{m_A\frac{2m_A + m_B}{m_B}\dot{y}_1^2}_{= T_Y \text{ (6b)}} = T$$

en. kinet. drgań podłużnych — en. kinet. drg. poprzecznych

b) Energia potencjalna sprężystości $U = U_X + U_Y$

en. pot. dla kierunku OX — en. pot. dla kierunku OY

Wiązania chemiczne między A i B to tak jakby sprężyny, które mają współczynnik k_1 dla drgań podłużnych (OX)

$\downarrow$ chmury e^- od at A i B + odpychanie jądro-jądro

oraz efektywne k_2 dla drgań poprzecznych

$k_2 \ll k_1$

$\hookrightarrow$ hybrydyzacja orbitali i chmury e^-, która dąży do „wyprostowania" molekuły

$$U_x = \frac{1}{2}k_1(x_1-x_2)^2 + \frac{1}{2}k_1(x_3-x_2)^2 = \frac{k_1}{2}\left[x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 + x_2^2\right] =$$

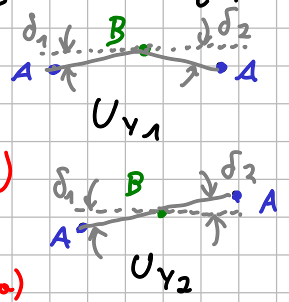
$$= \frac{k_1}{2}\left[x_1^2 + x_3^2 + 2x_2^2 - 2x_2(x_1+x_3)\right] \overset{(5a)}{=} \frac{k_1}{2}\left[x_1^2 + x_3^2 + \frac{2m_A^2}{m_B^2}(x_1+x_3)^2 + 2\frac{m_A}{m_B}(x_1+x_3)^2\right] =$$

$$= \frac{k_1}{2}\left[(x_1^2+x_3^2)\left(1 + \frac{2m_A^2}{m_B^2} + 2\frac{m_A}{m_B}\right) + 2x_1x_3\frac{2m_A}{m_B}\left(\frac{m_A}{m_B}+1\right)\right]$$

$$U_x = \frac{k_1}{2}\left(\frac{(m_A+m_B)^2 + m_A^2}{m_B^2}(x_1^2+x_3^2) + \frac{4m_A(m_A+m_B)}{m_B^2}x_1x_3\right) \qquad (7a)$$

Dla osi OX mieliśmy „sprężyny”, które rozciągały/ściskały molekułę. Z kolei dla osi OY mamy jakby wahadło torsyjne, które skręca molekułę.

$$U_Y = \frac{1}{2}k_2 l^2(\delta_1+\delta_2)^2, \text{ gdzie } \delta_1 = \frac{Y_1-Y_2}{l}\ (*_2), \quad \delta_2 = \frac{Y_3-Y_2}{l}\ (*_3)$$ to kąty skręcenia molekuły



intuicja: $U_{Y_1} > U_{Y_2}$, stąd definicje $(*_2)$ i $(*_3)$

$$\Big\downarrow (*_2), (*_3)$$

$$U_Y = \frac{1}{2}k_2 l^2\left(\frac{Y_1+Y_3-2Y_2}{l}\right)^2 \overset{(5b)}{=} \frac{1}{2}k_2\left(Y_1+Y_3+4\frac{m_A}{m_B}Y_1\right)^2 \overset{(4a)}{=}$$

$$= \frac{k_2}{2}\left(2+4\frac{m_A}{m_B}\right)^2 Y_1^2 = 2k_2Y_1^2\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\right)^2$$

$$U_Y = 2k_2\left(\frac{2m_A+m_B}{m_B}\right)^2 Y_1^2 \qquad (7b)$$

Zauważmy, że T_X zależy tylko od $\dot{x}_1, \dot{x}_3$
T_Y —— || —— $\dot{Y}_1$
U_X —— || —— x_1, x_3
U_Y —— || —— Y_1

Możemy zatem rozdzielić Lagrangian molekuły, $\mathcal{L}$, na dwie całkowicie niezależne od siebie części. Wówczas z $\mathcal{L}_X = T_X - U_X$ otrzymamy wzory na 2 mody podłużne, a z $\mathcal{L}_Y = T_Y - U_Y$ otrzymamy wzór na 1 mod poprzeczny ($\mathcal{L}_X \to$ r-nia na x_1, x_3, $\mathcal{L}_Y \to$ r-nie na Y_1).

Drgania:

a) poprzeczne:

$$\mathcal{L}_y = T_y - U_y \overset{(6b,7b)}{=} \frac{m_A}{m_B}(2m_A+m_B)\dot{y}_1^2 - \frac{2k_2}{m_B^2}(2m_A+m_B)^2 y_1^2 \qquad (8)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_y}{\partial \dot{y}_1} = \frac{2m_A}{m_B}(2m_A+m_B)\dot{y}_1 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_y}{\partial \dot{y}_1}\right) = \frac{2m_A}{m_B}(2m_A+m_B)\ddot{y}_1$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_y}{\partial y_1} = -\frac{4k_2}{m_B^2}(2m_A+m_B)^2 y_1$$

→ r-nie Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{2m_A}{\cancel{m_B}}\cancel{(2m_A+m_B)}\ddot{y}_1 = -\frac{4k_2}{m_B^{\cancel{2}}}(2m_A+m_B)^{\cancel{2}} y_1$$

$$2m_A\ddot{y}_1 = -4\frac{k_2}{m_B}(2m_A+m_B)\,y_1 \qquad (9)$$

⚠ Jeżeli mamy równanie postaci:

$$coś_1 \cdot \ddot{f} = -coś_2 \cdot f,$$

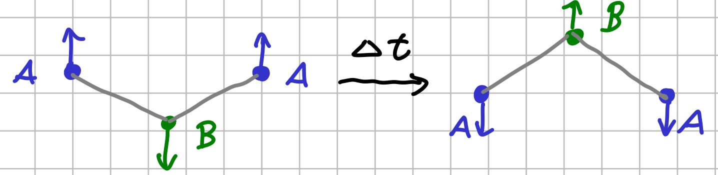
gdy $coś_1, coś_2 > 0$, to JEST TO RUCH DRGAJĄCY HARMONICZNY o częstości

$$\omega = \sqrt{\frac{coś_2}{coś_1}}$$

czyli u nas częstość drgań poprzecznych to

$$\omega_{pop} = \sqrt{\frac{4k_2(2m_A+m_B)}{m_B \cdot 2m_A}} = \sqrt{\frac{2k_2}{m_A m_B}(2m_A+m_B)} \qquad (10)$$

Z (4a) i (5b) pamiętamy, że $y_1 = y_3$ oraz $y_2 = \underbrace{-2\frac{m_A}{m_B}}_{\in\mathbb{R},\ <0} y_1$, czyli cząstki 1 i 3 mają wychylenie w tę samą stronę, a cz. 2 wychyla się w przeciwną stronę. Drgania poprzeczne są zatem takie:



z częstością ω_{pop}.

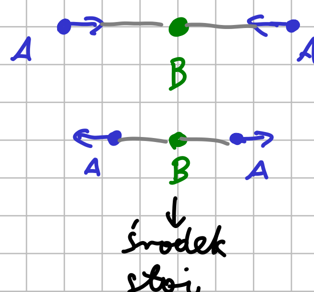
b) podłużne

$$\mathcal{L}_x = T_x - U_x \overset{(6a,7a)}{=} \frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_A^2}{2m_B}(\dot{x}_1 + \dot{x}_3)^2$$

$$-\frac{k_1}{2}\left(\frac{(m_A+m_B)^2 + m_A^2}{m_B^2}(x_1^2 + x_3^2) + \frac{4m_A(m_A+m_B)}{m_B^2}x_1 x_3\right) \qquad (11)$$

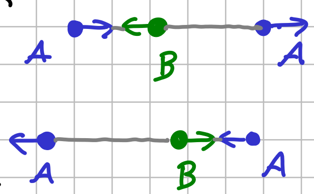
Tutaj będą 2 mody drgań:

symetryczne (S) — antysymetryczne (A)



wprowadźmy $Q_S = x_1 - x_3$

Wprowadźmy $Q_A = x_1 + x_3$



wówczas

$$\overset{(\cdot)}{x}_1 = \frac{1}{2}\left(\overset{(\cdot)}{Q}_A + \overset{(\cdot)}{Q}_S\right) \qquad (12a)$$

$$\overset{(\cdot)}{x}_3 = \frac{1}{2}\left(\overset{(\cdot)}{Q}_A - \overset{(\cdot)}{Q}_S\right) \qquad (12b)$$

i Lagrangian $\mathcal{L}_X$ ma postać

$$\mathcal{L}_X = \frac{m_A}{2}\left(\frac{1}{4}(\dot Q_A + \dot Q_S)^2 + \frac{1}{4}(\dot Q_A - \dot Q_S)^2\right) + \frac{m_A^2}{2m_B}\dot Q_A^2 - \frac{k_1}{2}\left(\frac{(m_A+m_B)^2 + m_A^2}{m_B^2}\cdot\frac{1}{4}\left((Q_A+Q_S)^2 + (Q_A-Q_S)^2\right) + \frac{4m_A}{m_B^2}(m_A+m_B)\frac{1}{4}(Q_A+Q_S)(Q_A-Q_S)\right) =$$

$$= \frac{m_A}{8}\left(\dot Q_A^2 + \dot Q_S^2 + \cancel{2\dot Q_A \dot Q_S} + \dot Q_A^2 + \dot Q_S^2 - \cancel{2\dot Q_A \dot Q_S}\right) + \frac{m_A^2}{2m_B}\dot Q_A^2 - \frac{k_1}{8}\frac{(m_A+m_B)^2 + m_A^2}{m_B^2}\left(Q_A^2 + Q_S^2 + \cancel{2Q_AQ_S} + Q_A^2 + Q_S^2 - \cancel{2Q_AQ_S}\right) - \frac{2k_1 m_A}{m_B^2}(m_A+m_B)\frac{1}{4}\left(Q_A^2 - Q_S^2\right) =$$

$$= \frac{m_A}{4}\dot Q_S^2 + \frac{m_A}{4}\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\right)\dot Q_A^2 - \frac{k_1}{4}\frac{m_A^2 + 2m_Am_B + m_B^2 + m_A^2}{m_B^2}\left(Q_A^2 + Q_S^2\right) - \frac{k_1}{4}\frac{2m_A^2 + 2m_Am_B}{m_B^2}\left(Q_A^2 - Q_S^2\right) =$$

$$= \frac{m_A}{4}\dot Q_S^2 + \frac{m_A}{4}\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\right)\dot Q_A^2 - \frac{k_1}{4}\frac{4m_A^2 + 4m_Am_B + m_B^2}{m_B^2}Q_A^2 - \frac{k_1}{4}Q_S^2$$

Podsumowując

$$\mathcal{L}_X = \underbrace{\frac{m_A}{4}\dot Q_S^2 - \frac{k_1}{4}Q_S^2}_{=\mathcal{L}_X^S \,\to\, \text{drgania symetryczne}\ (14a)} + \underbrace{\frac{m_A}{4}\left(\frac{2m_A+m_B}{m_B}\right)\dot Q_A^2 - \frac{k_1}{4}\left(\frac{2m_A+m_B}{m_B}\right)^2 Q_A^2}_{\mathcal{L}_X^A \,\to\, \text{drgania antysymetryczne}\ (14b)} \qquad (13)$$

$Q_S, \dot Q_S, Q_A, \dot Q_A \to$ niezależne

drgania symetryczne

$$\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_x^S}{\partial \dot{Q}_S} = \frac{m_A}{2}\dot{Q}_S \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_x^S}{\partial \dot{Q}_S}\right) = \frac{m_A}{2}\ddot{Q}_S$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_x^S}{\partial Q_S} = -\frac{k_1}{2} Q_S$$

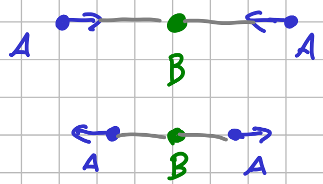
→ r-nie Lagrange'a:

$$\frac{m_A}{2}\ddot{Q}_S = -\frac{k_1}{2} Q_S \qquad (15a)$$

↓

ruch drgający harmoniczny o częstości

$$\omega_S = \sqrt{\frac{k_1}{2}\cdot\frac{2}{m_A}} = \sqrt{\frac{k_1}{m_A}} \qquad (16a)$$



↓

środek stoi

drgania antysymetryczne

$$\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_x^A}{\partial \dot{Q}_A} = \frac{m_A}{2}\frac{(2m_A+m_B)}{m_B}\dot{Q}_A$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_x^A}{\partial \dot{Q}_A}\right) = \frac{m_A}{2}\frac{(2m_A+m_B)}{m_B}\ddot{Q}_A$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_x^A}{\partial Q_A} = -\frac{k_1}{2}\left(\frac{2m_A+m_B}{m_B}\right)^2 Q_A$$

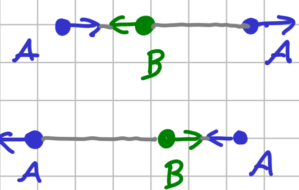
→ r-nie Lagrange'a:

$$\frac{m_A}{2}\frac{\cancel{(2m_A+m_B)}}{\cancel{m_B}}\ddot{Q}_A = -\frac{k_1}{2}\frac{(2m_A+m_B)^{\cancel{2}}}{m_B^{\cancel{2}}} Q_A \qquad (15b)$$

↓

ruch drgający harm. o częstości

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k_1}{2}\frac{(2m_A+m_B)}{m_A m_B}\cdot 2} = \sqrt{\frac{k_1(2m_A+m_B)}{m_A m_B}} \qquad (16b)$$



4 r-nie falowe: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, czyli $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ (*)

$x \in (0,1)$ $\qquad t \in (0,\infty)$

warunki początkowe:

$u(0,t) = 0$ (W1) $\qquad u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ (W3)

$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1} = 0$ (W2) $\qquad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ (W4)

(!) Zakładamy, że $u(x,t)$ ma postać

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t) \qquad (1)$$

Wówczas z (1) i (*)

$$X(x)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} T(t)$$

$$\downarrow \cdot \frac{1}{c^2 X(x) T(t)}$$

$$L = \frac{1}{c^2}\frac{\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}}{T(t)} = \frac{\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}{X(x)} = P$$

(!) L zależy TYLKO od t → jak zmienimy x, to L się nie zmieni (a więc P też)

P zależy TYLKO od x → jak zmienimy t, to P się nie zmieni (a więc L też)

Wniosek

$$\frac{1}{c^2}\frac{\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}}{T(t)} = \frac{\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}{X(x)} = const = -\lambda \quad (2)$$

λ – tzw. stała rozdzielenia

Policzmy zatem $X(x)$:

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\lambda X(x) \quad (3)$$

1° $\lambda < 0 \rightarrow \lambda = -k^2 \rightarrow \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = k^2 X(x)$

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial X(x)}{\partial x} = Ake^{kx} - Bke^{-kx} \quad (4.1')$$

z (1) i (W1) mamy, że $X(0)=0$, czyli z (4.1)

bo w ogólności $T(t) \neq 0$

$$A + B = 0 \rightarrow B = -A \quad (4.1.1)$$

z kolei z (1) i (W2) $\left.\frac{\partial X(x)}{\partial x}\right|_{x=1} = 0$, czyli z (4.1')

$$Ake^{k} - Bke^{-k} = 0$$

$$\downarrow (4.1.1)$$

$$Ak(e^k + e^{-k}) = 0$$

$$\downarrow$$

$$A = 0 \quad (4.1.2)$$

z (4.1.1) i (4.1.2) $X(x) = 0 \xrightarrow{(1)} u(x,t) = 0$ dla $\lambda < 0$.

2° $\lambda = 0$ $\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = 0 \rightarrow X(x) = \alpha x + \beta \quad (4.2)$

z (W1) $\rightarrow X(0) = 0 \rightarrow \beta = 0 \quad (4.2.1)$

z (4.2) i (4.2.1) $\rightarrow \frac{\partial X(x)}{\partial x} = \alpha$

z (W2) $\left.\frac{\partial X(x)}{\partial x}\right|_{x=1} = 0 \rightarrow \alpha = 0 \quad (4.2.2)$

zatem z (4.2.1) i (4.2.2) $\rightarrow X(x) = 0 \rightarrow u(x,t) = 0$ dla $\lambda = 0$.

3° $\lambda > 0$, czyli $\lambda = k^2$

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -k^2 X(x) \quad (*_2)$$

Rozwiązanie $(*_2)$ ma postać

$$X(x) = \tilde{A}\sin(kx) + \tilde{B}\cos(kx) \qquad (4.3)$$
$$\frac{\partial X(x)}{\partial x} = \tilde{A}k\cos(kx) - \tilde{B}k\sin(kx) \qquad (4.3')$$
$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\tilde{A}k^2\sin(kx) - \tilde{B}k^2\cos(kx) \qquad (4.3'')$$

Z (W1) mamy: $X(0)=0 \rightarrow \tilde{B} = 0 \qquad (4.3.1)$

Z (W2), (4.3') i (4.3.1) $\left.\frac{\partial X(x)}{\partial x}\right|_{x=1} = 0 \rightarrow \tilde{A}k\cos k = 0$,

czyli jedyne nietrywialne $(\tilde{A} \neq 0)$ rozwiązanie to $\cos k = 0$

$$k = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

zatem $k_n = \pi\left(\frac{1}{2}+n\right), \quad n \in \mathbb{Z} \qquad (4.3.2)$

i mamy całą rodzinę rozwiązań.

Skoro tak, to możemy (1) zmodyfikować do postaci

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(t) = T_n(t)\cdot\tilde{A}_n\sin(\overbrace{k_n}^{\pi(\frac{1}{2}+n)}x), \qquad (5)$$

natomiast rozwiązanie (*) to kombinacja liniowa $u_n(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_{n \to \in \mathbb{Z}} F_n u_n(x,t) \qquad (5')$$

Dla każdego n liczymy teraz $T_n(t)$ z (2):

$$\frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} = -c^2k_n^2T_n(t) \qquad (6)$$

Rozwiązanie (6) ma postać:

$$T_n(t) = \tilde{C}_n\sin(ck_nt) + \tilde{D}_n\cos(ck_nt) \qquad (7)$$
$$\frac{\partial T_n(t)}{\partial t} = \tilde{C}_nck_n\cos(ck_nt) - \tilde{D}_nck_n\sin(ck_nt) \qquad (7')$$

z warunku (W3), (5') i (5) mamy, że

$$\sum_n F_n \underbrace{\tilde{D}_n}_{T_n(0)} \cdot \underbrace{\tilde{A}_n\sin\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}_{X_n(x)} = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

sinusy o różnych częstotliwościach (przestrzennych – tu k_n) są LINIOWO NIEZALEŻNE. Zatem możemy przyjąć, że:

$\downarrow\ \tilde{A}_n = 1/(F_n \tilde{D}_n)$ dla $n=0$, $\tilde{A}_n = 0$ dla reszty n

i wówczas $$X_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{F_0 \tilde{D}_0} \sin\frac{\pi x}{2} & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

i tym samym, z (5), (5') i (8) mamy, że

$$u(x,t) = F_0 T_0(t) X_0(t) = T_0(t) \cdot \frac{1}{\tilde{D}_0} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad (9)$$

łącząc (4.3.2), (7) i (9) dostajemy

$$u(x,t) = \left(\tilde{C}_0 \sin\left(\frac{c\pi}{2}t\right) + \tilde{D}_0 \cos\left(\frac{c\pi}{2}t\right)\right)\frac{1}{\tilde{D}_0} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad (10)$$

Warunek (W4) daje, że

$$\left(\tilde{C}_0 \frac{c\pi}{2} \cdot 1 + 0\right)\frac{1}{\tilde{D}_0} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$$

zatem $\tilde{C}_0 = 0$ (11)

Ostatecznie otrzymujemy zatem, że

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{c\pi}{2}t\right). \quad (12)$$

LISTA 11

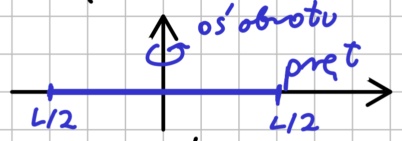
$$I = \int_a^b (x - x_0)^2 \varrho(x)\, dx \quad (1)$$

(!) gęstość liniowa, $\left[\frac{kg}{m}\right]$, bo jednostka I to $[kg \cdot m^2]$

$\boxed{1}$ pręt jednorodny, zatem $\varrho(x) = const = \frac{m}{L}$ (2)

a) tutaj $a = -\frac{L}{2}$, $b = \frac{L}{2}$, $x_0 = x_{ś.m} = 0$

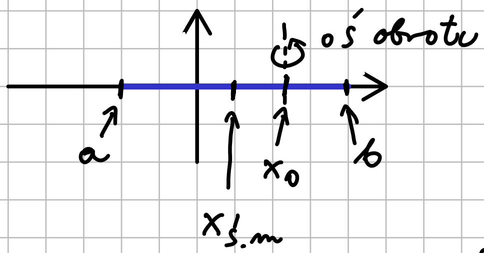
x_0 – położenie osi obrotu; $x_{ś.m}$ – środek masy



$$I_{cm} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{m}{L} dx = \frac{m}{L} \frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{m}{3L}\left(\frac{L^3}{8} - \left(-\frac{L^3}{8}\right)\right) = \frac{mL^2}{12} \quad (3)$$

b) Aby wyprowadzić tw. Steinera, załóżmy, że $x_{śm} \neq 0$.
Wówczas $a = -\frac{L}{2} + x_{śm}$ (4a), $b = \frac{L}{2} + x_{ś.m}$, (4b) a x_0 to jeszcze

inna zmienna. Wówczas



$$I = \int_a^b (x-x_0)^2 \frac{m}{L}\, dx = \frac{m}{L}\int_a^b (x^2 - 2x x_0 + x_0^2)\, dx$$

$$= \frac{m}{L}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_a^b - 2x_0 \frac{x^2}{2}\Big|_a^b + x_0^2\, x\Big|_a^b\right) =$$

$$= \frac{m}{L}\left[\frac{b^3-a^3}{3} - x_0(b^2-a^2) + x_0^2(b-a)\right] =$$

$$= \frac{m}{L}\left[\frac{1}{3}(b-a)(a^2+ab+b^2) - x_0(b-a)(b+a) + x_0^2(b-a)\right] =$$

$$= \frac{m}{L}(b-a)\left(\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) - x_0(b+a) + x_0^2\right) \overset{(4)}{=} \quad , \; b-a=L$$

$$= m\left[\frac{1}{3}\left(\frac{L^2}{4} - \cancel{Lx_{śm}} + x_{śm}^2 + x_{śm}^2 - \cancel{\frac{L^2}{4}} + \cancel{\frac{L^2}{4}} + \cancel{Lx_{śm}} + x_{śm}^2\right) - x_0\, 2x_{śm} + x_0^2\right] =$$

$$= \frac{mL^2}{12} + \frac{m}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}\, x_{śm}^2 - 2m x_0 x_{śm} + m x_0^2 =$$

tw. Steinera

$$= \frac{mL^2}{12} + m\,(x_{śm} - x_0)^2 \overset{(3)}{=} I_{cm} + md^2 = I \qquad (5)$$

d = odległość środka masy od osi obrotu