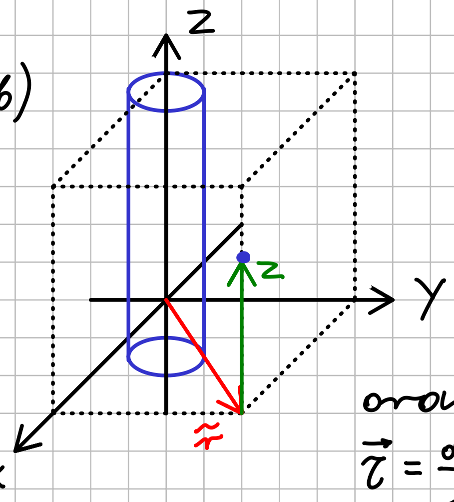
LISTA 3 i 4 - DOKOŃCZENIE ZADAŃ

z. 8. b)



$U = U(x^2+y^2)$ (1) , $\tilde r = \sqrt{x^2+y^2}$ (2)

Na zajęciach doszliśmy, że $p_z = const$ (3) → symetria translacyjna względem osi OZ

oraz

$$\vec\tau = \frac{d\vec L}{dt} = \hat i\left(\dot y p_z + y\cancelto{0\ (3)}{\dot p_z} - \dot z p_y - z\dot p_y\right) + \hat j\left(\dot z p_x + z\dot p_x - \dot x p_z - x\cancelto{0\ (3)}{\dot p_z}\right) + \hat k\left(\dot x p_y + x\dot p_y - \dot y p_x - y\dot p_x\right)$$

$\vec p = m\vec v$

$$\vec\tau = \hat i\left(v_y p_z - v_z p_y - zF_y\right) + \hat j\left(v_z p_x + zF_y - v_x p_z\right) + \hat k\left(v_x p_y + xF_y - v_y p_x - yF_x\right) =$$

$$= \hat i\left(m\cancelto{0}{[v_y v_z - v_z v_y]} - zF_y\right) + \hat j\left(m\cancelto{0}{[v_z v_x - v_x v_z]} + zF_y\right) + \hat k\left(m\cancelto{0}{[v_x v_y - v_y v_x]} + xF_y - yF_x\right) =$$

$$= -\hat i\, zF_y + \hat j\, zF_y + \hat k\left(xF_y - yF_x\right) \qquad (4)$$

Pamiętamy, że $\vec F = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \cancelto{0\ (1)}{\frac{\partial U}{\partial z}}\right) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, 0\right)$ (5)

Skoro $U = U(x^2+y^2)$, to

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial(\tilde r^2)}\frac{\partial(\tilde r^2)}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial(\tilde r^2)}\cdot 2x \qquad (6a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial(\tilde r^2)}\frac{\partial(\tilde r^2)}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial(\tilde r^2)}\, 2y \qquad (6b)$$

→ można też po $\partial\tilde r$ liczyć

I teraz, z (4) - (6) mamy

$$\vec\tau = \hat i\, z\frac{\partial U}{\partial y} - \hat j\, z\frac{\partial U}{\partial y} + \hat k\left(x\left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right) - y\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right) =$$

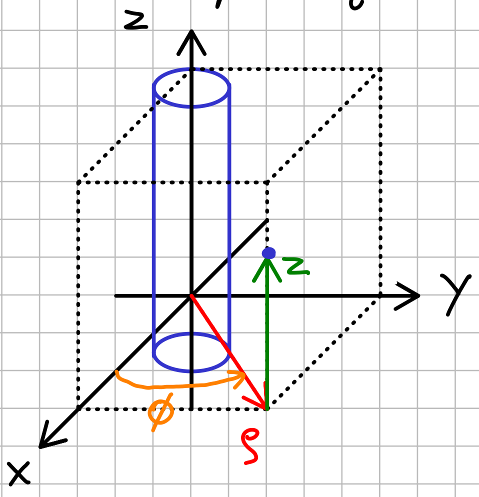
$$= \underbrace{2\hat i\, zy\frac{\partial U}{\partial(\tilde r^2)}}_{\tau_x \neq 0} - \underbrace{2\hat j\, zy\frac{\partial U}{\partial(\tilde r^2)}}_{\tau_y \neq 0} + \hat k\underbrace{\cancelto{0}{\left(-2xy\frac{\partial U}{\partial(\tilde r^2)} + 2xy\frac{\partial U}{\partial(\tilde r^2)}\right)}}_{\tau_z = 0}$$

↓

czyli $L_z = const$

symetria rotacyjna względem osi OZ

Współrzędne biegunowe:



$$U = U(\rho)$$

$$\vec{F} = -\text{grad } U = -\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\cdot 0 \cdot \hat{\phi} + 0\cdot \hat{z}\right)$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \rho}\hat{\rho} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (1)$$

Wiemy, że $\hat{\rho} = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi$ (2)

zatem $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \rho}(\hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi)$

$\downarrow$

$F_x \neq 0,\ F_y \neq 0,\ F_z = 0$

$\downarrow$

$p_x \neq const,\ p_y \neq const,\ p_z = const$

czyli $p_\rho, p_\phi \neq const$ → por. (13a'b') z notatek o ukł. wsp. walcowym

dla wsp. walcowych:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} \qquad (3)$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \rho & 0 & z \\ -\frac{\partial U}{\partial \rho} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\phi}\, z\frac{\partial U}{\partial \rho} \qquad (4)$$

Pamiętamy, że $\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$ (5),

zatem
$$\vec{\tau} = -\hat{i}(\sin\phi) z\frac{\partial U}{\partial \rho} + \hat{j}(\cos\phi) z\frac{\partial U}{\partial \rho} + \hat{k}\cdot 0$$

$\downarrow$

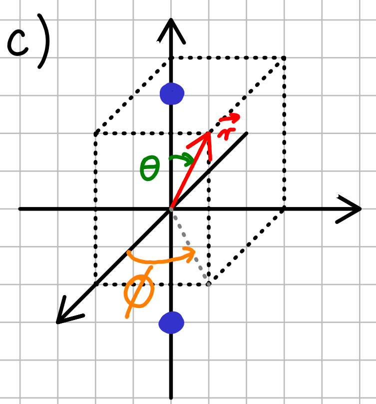
$\tau_z = 0 \rightarrow L_z = const$

⚠ Do obliczania pochodnych po czasie wygodne są współrzędne kartezjańskie – ale do liczenia $\vec{F}, \vec{\tau}, \vec{L}$ – współrzędne wygodne dla danej sytuacji (np. biegunowe albo sferyczne)

bo $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ nie zależą od czasu ←

z. 8.

c)



$$U = U(r, \theta)$$

$F_\phi = const$

$$\vec{F} = -\text{grad } U = -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\hat{\theta} - 0 \qquad (1')$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial r}(\hat{i}\cos\phi\sin\theta + \hat{j}\sin\phi\sin\theta + \hat{k}\cos\theta)$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}(\hat{i}\cos\phi\cos\theta + \hat{j}\sin\phi\cos\theta - \hat{k}\sin\theta)$$

$\downarrow$

w ogólności $p_x \neq const$, $p_y \neq const$ i $p_z \neq const$

czyli NIE MA symetrii translacyjnej!

Wiemy, że $\vec{r} = r\hat{r}$ (2')

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ r & 0 & 0 \\ -\frac{\partial U}{\partial r} & -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} & 0 \end{vmatrix} = -\hat{\phi}\,\frac{\partial U}{\partial \theta} \qquad (3')$$

Wiedząc, że dla współrzędnych sferycznych

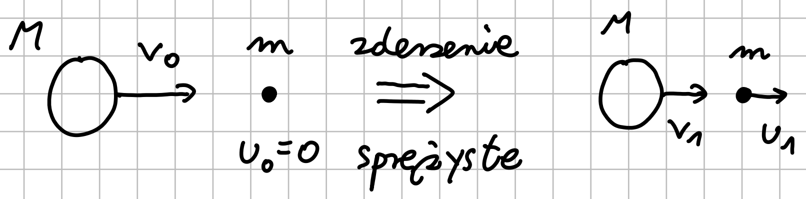
$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi \qquad (4')$$

mamy, że $\vec{\tau} = \hat{i}\,\frac{\partial U}{\partial \theta}\sin\phi - \hat{j}\,\frac{\partial U}{\partial \theta}\cos\phi + \hat{k}\cdot 0 \qquad (5')$

$\downarrow \tau_x \neq 0 \qquad \downarrow \tau_y \neq 0 \qquad \downarrow \tau_z = 0$

symetria rotacyjna względem osi OZ $\rightarrow L_z = \text{const}$

z. 10



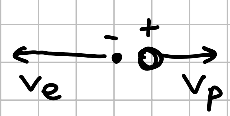
$$\left.\begin{aligned} Mv_0 &= Mv_1 + mu_1 \\ \tfrac{1}{2}Mv_0^2 &= \tfrac{1}{2}Mv_1^2 + \tfrac{1}{2}mu_1^2 \end{aligned}\right\} \text{proszę przeliczyć} \rightarrow u_1 = \frac{2M}{m+M}v_0 \overset{M \gg m}{\approx} 2v_0$$

$$v_1 = v_0\,\frac{M-m}{M+m}$$

z. 11.

a) TAK, en. kinet. elektronu musi być ściśle określona

$p_{tot} = 0 \rightsquigarrow$ proszę przeliczyć:



$$p_{e^-} = p_p = p = \sqrt{\frac{2\mathcal{E} m_e m_p}{m_e + m_p}}$$

$$E_{kin}^{e^-} = \frac{p_{e^-}^2}{2m_e} = \mathcal{E}\,\frac{m_p}{m_e + m_p}$$

b) Eksperyment Jamesa Chadwicka: $E_{kinet}^{e^-}$ ma ciągłe spektrum: $E_{kinet}^{e^-} \leq E_{k\,max}^{e^-} = \mathcal{E}\,\frac{m_p}{m_e + m_p}$.

Ale jeśli jednocześnie $E_{kinet}^{e^-}$ jest określona to znaczy, że musi istnieć trzecia cząstka, zabierająca część $\mathcal{E}$ → jest nią antyneutrino elektronowe (hipoteza Wolfganga Pauliego):

$$n \rightarrow p^+ e^- + \bar{\nu}_e$$