1. PERMUTACJE

Rozważmy ciąg N uporządkowanych elementów, $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$.

Wówczas permutacją nazywamy funkcję ustawiającą elementy tego ciągu w pewien ustalony sposób, np. $(a_3, a_1, a_2, a_4, \ldots, a_N)$

przykłady: Perm. identycznościowa → nic nie robi

Transpozycja → zamienia miejscami dwa elementy ciągu

fakt (F1) → Każdą permutację można zapisać jako złożenie transpozycji (na ∞ sposobów). Zawsze, niezależnie od sposobu kombinacji transpozycji, dla zadanej permutacji liczba transpozycji będzie albo parzysta albo nieparzysta. Wówczas taką permutację nazywamy odpowiednio parzystą albo nieparzystą.

znak permutacji P → $\operatorname{sgn}(P) = \begin{cases} 1 & \text{dla } P \text{ parzystej} \\ -1 & \text{dla } P \text{ nieparzystej} \end{cases}$

$$\operatorname{sgn} P = (-1)^{P_T}$$

P_T → liczba transpozycji tworzących permutację P

fakt (F2):

Niech $\pi(N)$ → zbiór wszystkich permutacji dla ciągu N-elementowego. Wówczas $\pi(N)$ zawiera $N!$ różnych permutacji

fakt (F3): $\displaystyle\sum_{Q\in\pi(N)} f(Q) = \sum_{Q\in\pi(N)} f(Q\circ P)$

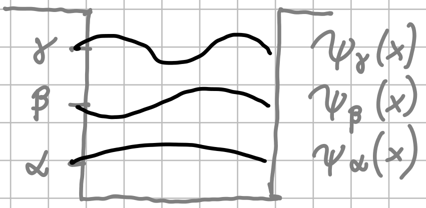
P → jakaś inna permutacja, niezależna od Q

↳ Niezależnie od P, przejeżdżamy po wszystkich $N!$ opcjach permutacji dla ciągów N-elementowych.

2. STANY KWANTOWE

a) jednocząstkowe

$|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle \to$ np. spin, polaryzacja, itp.



def $\psi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle$

$\{|\alpha_j\rangle\} \to$ baza stanów jednocząstkowych, rozpinających prz. Hilb. $\mathcal{H}$.

niech $\dim\{|\alpha_j\rangle\} = k$

$\{|\alpha_j\rangle\} \to$ ortonormalna $\to \langle\alpha_j|\alpha_k\rangle = \delta_{jk}$ $\quad j,k \to$ numer stanów NIE CZĄSTEK!

$\to$ zupełna $\to \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j\rangle\langle\alpha_j| = \hat{\mathbb{1}} \in \mathcal{H}$

Dowolny stan $|\varphi\rangle \in \mathcal{H} \to |\varphi\rangle = \hat{\mathbb{1}}|\varphi\rangle = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\langle\alpha_j|\varphi\rangle}_{a_j} |\alpha_j\rangle$

b) Wielocząstkowe (N cząstek)

u nas zwykle $\mathcal{H}_1 = \ldots = \mathcal{H}_N = \mathcal{H}$

$$\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_N$$

// $\otimes \to$ iloczyn tensorowy

$(\iota) \to$ nr cząstki, $\iota \in \{1, 2, \ldots, N\}$

- bazy: $\{|\alpha^{(1)}_{j_1}\rangle\}, \{|\alpha^{(2)}_{j_2}\rangle\}, \ldots, \{|\alpha^{(N)}_{j_N}\rangle\}$

$j_\iota \to$ nr stanu, $j_\iota \in \{1, 2, \ldots, k\}$

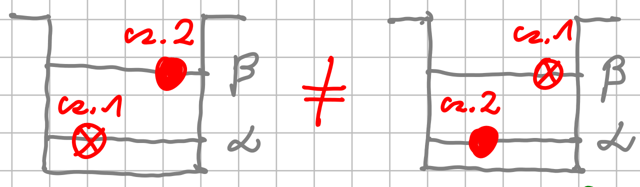
$\downarrow$ w ogólności, dla bozonów, może się zdarzyć, że np. $j_1 = j_3 = 2$

- a baza $\mathcal{H}_{tot} \to \{|\alpha^{(1)}_{j_1}\rangle \otimes |\alpha^{(2)}_{j_2}\rangle \otimes \ldots \otimes |\alpha^{(N)}_{j_N}\rangle\}$
- stan N cząstek, rozróżnialnych (r)

$$|\alpha^{(1)}_{j_1} \ldots \alpha^{(N)}_{j_N})^r = |\alpha^{(1)}_{j_1}\rangle \otimes |\alpha^{(2)}_{j_2}\rangle \otimes \ldots \otimes |\alpha^{(N)}_{j_N}\rangle$$

⚠ dla cz. rozróżnialnych kolejność ma znaczenie!

np. dla $N = 2$



$$|\alpha\beta)^r \neq |\beta\alpha)^r$$

- ortonormalność bazy $\left\{ \left| \alpha^{(1)}_{j_1}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_N} \right)^r \right\}$ — iloczyn iloczynów skalarnych, stąd (L) znikają

$${}^r\!\left(\alpha^{(1)}_{j_1}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_N} \middle| {}^{(1)}_{j_1'}, \ldots, {}^{(N)}_{j_N'} \right)^r = \langle \alpha_{j_1} | \alpha_{j_1'} \rangle \cdot \ldots \cdot \langle \alpha_{j_N} | \alpha_{j_N'} \rangle =$$
$$= \delta_{j_1 j_1'} \cdot \ldots \cdot \delta_{j_N j_N'}$$

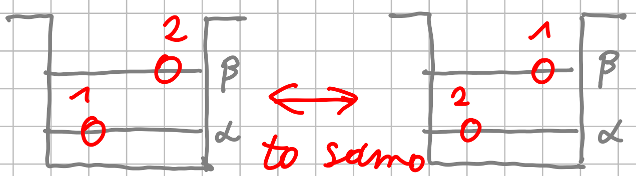
Innymi słowy, ciągi $(\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_N})$ i $(\alpha_{j_1'}, \ldots, \alpha_{j_N'})$ MUSZĄ BYĆ identyczne

- zupełność bazy $\left\{ \left| \alpha^{(1)}_{j_1}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_N} \right)^r \right\}$

$$\sum_{j_1, \ldots, j_N = 1}^{k} \left| \alpha^{(1)}_{j_1}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_N} \right)^{r\,r}\!\left(\alpha^{(1)}_{j_1}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_N} \right| = \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{H}_{tot}}$$

→ to już $\hat{\mathbb{1}}$ ale z prz. Hilb $\mathcal{H}_{tot}$

- stan N cząstek nierozróżnialnych (nr)



tracimy informację która cząstka jest którą

Intuicja o f. falowej takiego ukł. cząstek:

zamiana cząstek (np. 1 i 3) nierozróżnialnych:

→ nie może zmienić mierzalnej gęstości p-stwa:

$$\left| \psi^{nr}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N) \right|^2 = \left| \psi^{nr}(x_3, x_2, x_1, \ldots, x_N) \right|^2 \quad (*_1)$$

→ zmienia jedynie globalną fazę ϕ całego układu, a ta faza jest nieobserwowalna

$$\psi^{nr}(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_N) = e^{i\phi}\, \psi^{nr}(x_3, x_2, x_1, x_4, \ldots, x_N) \quad (*_2)$$

wówczas $(*_1)$ jest spełniona

faza ϕ NIE MOŻE zależeć od numerów cząstek, które przestawiamy, wszak cząstki są tu nierozróżnialne

Zatem $\psi^{nr}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N) \overset{\text{zamiana } 1 \text{ i } 3}{=} e^{i\phi}\, \psi^{nr}(x_3, x_2, x_1, \ldots, x_N) =$

$$\underset{1 \text{ i } 3}{\overset{\text{zamiana}}{=}} e^{2i\phi}\, \psi^{nr}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)$$

A zatem musi być, że $e^{2i\phi} = 1$, stąd

$e^{i\phi} = 1$ lub $e^{i\phi} = -1$

bozony — f. falowa jest symetryczna na zamianę dwóch cząstek

fermiony — f. falowa jest antysymetryczna na zamianę dwóch cząstek

Aby zgubić rozróżnialność, tj.

$$|\alpha^{(1)}_{j_1}, \dots, \alpha^{(N)}_{j_N})^{r} \rightsquigarrow |\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_N})^{nr}_{\xi}, \quad \xi = e^{i\phi} = \pm 1$$

musimy uwzględnić wszystkie opcje kolejności cząstek

$$\boxed{|\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_N})^{nr}_{\xi} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in \Pi(N)} \xi^{P_T} |\alpha^{(1)}_{j_{P(1)}}, \dots, \alpha^{(N)}_{j_{P(N)}})^{r}} \quad (1)$$

wszystkie możliwe permutacje

Niech $\hat{P}$ → operator permutacji P działający na stan N rozróżnialnych cząstek, tj.

$$\hat{P} |\alpha^{(1)}_{j_1}, \dots, \alpha^{(N)}_{j_N})^{r} = |\alpha^{(1)}_{j_{P(1)}}, \dots, \alpha^{(N)}_{j_{P(N)}})^{r} \quad (2)$$

Wówczas możemy zdefiniować operatory symetryzacji $\hat{S}_+$ (dla bozonów) i antysymetryzacji $\hat{S}_-$ (dla fermionów) t. że

$$|\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_N})^{nr}_{\pm} = \hat{S}_{\pm} |\alpha^{(1)}_{j_1}, \dots, \alpha^{(N)}_{j_N})^{r}_{\pm} \overset{(1,2)}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in \Pi(N)} (\pm 1)^{P_T} \hat{P} |\alpha^{(1)}_{j_1}, \dots, \alpha^{(N)}_{j_N})^{r}_{\pm} \quad (1a)$$

konsekwencje – zakaz Pauliego dla fermionów

$$N=2 \quad |\alpha\beta)^{nr}_{-} = \frac{1}{\sqrt{2!}} \Big(\underbrace{(-1)^0 |\alpha\beta)^{r}}_{\text{nie robimy nic}} + \underbrace{(-1)^1 |\beta\alpha)^{r}}_{\text{transpozycja}} \Big) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\alpha\beta)^{r} - |\beta\alpha)^{r} \right)$$

Jeżeli $\alpha = \beta$, to $|\alpha\alpha)^{nr}_{-} = 0$ → nie ma takiego stanu

od razu widać, że $|\alpha\beta)^{nr}_{-} = -|\beta\alpha)^{nr}_{-}$ → antysymetryczna a dla bozonów?

$N=2 \quad |\alpha\beta)_+^{nr} = \frac{1}{\sqrt{2!}}\left(1^0|\alpha\beta)^r + 1^1|\beta\alpha)^r\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha\beta)^r + |\beta\alpha)^r\right)$

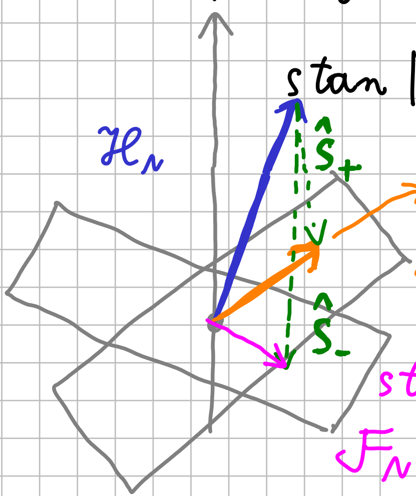
Dla $\alpha=\beta \rightarrow |\alpha\alpha)_+^{nr} = \sqrt{2}\,|\alpha\alpha)^r \neq 0$

$|\alpha\beta)_+^{nr} = |\beta\alpha)_+^{rn}$ → symetryczna

brak zak. Pauliego oznacza konieczność unormowania stanu!

dla bozonów zakaz Pauliego nie działa

- interpretacja geometryczna $\hat{S}_\pm$ → operator projekcji



stan $|\alpha^{(1)}_{j_1},\dots,\alpha^{(N)}_{j_N})^r$

stan $|\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})_+^{nr}$

stan $|\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})_-^{nr}$

rzutujemy stan początkowy na mniejszą podprzestrzeń, czyli tracimy informacje o rozróżnialności cząstek → nie wiemy już, która cz. jest którą.

$\mathcal{B}_N / \mathcal{F}_N$ → podprzestrzeń dla N nierozróżnialnych bozonów / fermionów

- policzmy teraz

$$\hat{S}_\pm^2 |\alpha^{(1)}_{j_1},\dots,\alpha^{(N)}_{j_N})^r \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{P\in\Pi(N)}(\pm1)^{P_T}\hat{S}_\pm|\alpha^{(1)}_{j_{P(1)}},\dots,\alpha^{(N)}_{j_{P(N)}})^r =$$

$$\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{P\in\Pi(N)}(\pm1)^{P_T}\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{Q\in\Pi(N)}(\pm1)^{Q_T}|\alpha^{(1)}_{j(Q\circ P(1))},\dots,\alpha^{(N)}_{j(Q\circ P(N))})^r = \dots$$

$Q\circ P$ → złożenie permutacji

Najważniejszą kwestią jest tu parzystość $Q\circ P$. Wolno nam zatem napisać, że $(\pm1)^{P_T+Q_T} = (\pm1)^{(Q\circ P)_T}$.

$$\ldots = \frac{1}{N!}\sum_{P\in\Pi(N)}\sum_{Q\in\Pi(N)} (\pm 1)^{(Q\circ P)_T} \left| \alpha^{(1)}_{j(Q\circ P)(1)}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j(Q\circ P)(N)} \right) \overset{(F3)}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{P\in\Pi(N)} \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{Q\in\Pi(N)} (\pm 1)^{Q_T} \left| \alpha^{(1)}_{jQ(1)}, \ldots, \alpha^{(N)}_{jQ(N)} \right) \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{P\in\Pi(N)} \hat{S}_\pm \left| \alpha^{(1)}_{j_1}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_N} \right) \overset{(F2)}{=} \left\{ \sum_{P\in\Pi(N)} 1 = N! \right\}$$

$$= \sqrt{N!}\, \hat{S}_\pm \left| \alpha^{(1)}_{j_1}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_N} \right)$$

czyli $\boxed{\hat{S}_\pm^2 \left| \alpha^{(1)}_{j_1}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_N} \right) = \sqrt{N!}\, \hat{S}_\pm \left| \alpha^{(1)}_{j_1}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_N} \right)}$ (3)

Teraz policzmy

$$\to \hat{P}\hat{S}_+ \left| \alpha^{(1)}_{j_1}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_N} \right) \overset{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{Q\in\Pi(N)} \hat{P} \left| \alpha^{(1)}_{jQ(1)}, \ldots, \alpha^{(N)}_{jQ(N)} \right) \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{Q\in\Pi(N)} \left| \alpha^{(1)}_{j(P\circ Q)(1)}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j(P\circ Q)(N)} \right) \overset{(F3)}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{Q\in\Pi(N)} \left| \alpha^{(1)}_{jQ(1)}, \ldots, \alpha^{(N)}_{jQ(N)} \right) \overset{(1)}{=} \hat{S}_+ \left| \alpha^{(1)}_{j_1}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_N} \right)$$

$$\to \hat{S}_+\hat{P} \left| \alpha^{(1)}_{j_1}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_N} \right) \overset{(2)}{=} \hat{S}_+ \left| \alpha^{(1)}_{jP(1)}, \ldots, \alpha^{(N)}_{jP(N)} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{Q\in\Pi(N)} \left| \alpha^{(1)}_{j(Q\circ P)(1)}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j(Q\circ P)(N)} \right) \overset{(F3)}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{Q\in\Pi(N)} \left| \alpha^{(1)}_{jQ(1)}, \ldots, \alpha^{(N)}_{jQ(N)} \right) \overset{(1)}{=} \hat{S}_+ \left| \alpha^{(1)}_{j_1}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_N} \right)$$

Podsumowując mamy, że zawsze

$$S_+ P = P S_+ = S_+ \quad (4)$$

3. ILOCZYN SKALARNY dla stanów N cz. nierozróżnialnych

$\hat{S}_\pm \rightarrow$ hermitowskie

$$ {}^{nr}_{\pm}\left(\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\middle|\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_N}\right)^{nr}_{\pm} = {}^{r}\left(\alpha^{(1)}_{j_1},\dots,\alpha^{(N)}_{j_N}\middle|\hat{S}_\pm\hat{S}_\pm\middle|\beta^{(1)}_{j_1},\dots,\beta^{(N)}_{j_N}\right)^{r} = $$

$$ \overset{(3)}{=} \sqrt{N!}\;{}^{r}\left(\alpha^{(1)}_{j_1},\dots,\alpha^{(N)}_{j_N}\middle|\hat{S}_\pm\middle|\beta^{(1)}_{j_1},\dots,\beta^{(N)}_{j_N}\right)^{r} = $$

$$ \overset{(1)}{=} \frac{\cancel{\sqrt{N!}}}{\cancel{\sqrt{N!}}}\sum_{P\in\Pi(N)}(\pm1)^{P_T}\;{}^{r}\left(\alpha^{(1)}_{j_1},\dots,\alpha^{(N)}_{j_N}\middle|\beta^{(1)}_{j_{P(1)}},\dots,\beta^{(N)}_{j_{P(N)}}\right)^{r} = $$

$$ = \sum_{P\in\Pi(N)}(\pm1)^{P_T}\langle\alpha_{j_1}|\beta_{j_{P(1)}}\rangle\cdot\ldots\cdot\langle\alpha_{j_N}|\beta_{j_{P(N)}}\rangle \qquad (5) $$

fakt (F4a)

wyznacznik (determinant) $\rightarrow$ det

$$ \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} = \sum_{P\in\Pi(N)} \overbrace{\mathrm{sgn}(P)}^{(-1)^{P_T}}\, a_{1P(1)}\cdot\ldots\cdot a_{NP(N)} $$

fakt (F4b)

permanent $\rightarrow$ per

$$ \mathrm{per}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} = \sum_{P\in\Pi(N)} a_{1P(1)}\cdot\ldots\cdot a_{NP(N)} $$

$1^{P_T}\equiv 1$

np. $\mathrm{per}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = ad+bc$

a) fermiony $\rightarrow$ z (F4a) i (4) mamy, że

$$ {}^{nr}_{-}\left(\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\middle|\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_N}\right)^{nr}_{-} = \det\begin{bmatrix} \langle\alpha_{j_1}|\beta_{j_1}\rangle & \langle\alpha_{j_1}|\beta_{j_2}\rangle & \cdots & \langle\alpha_{j_1}|\beta_{j_N}\rangle \\ \langle\alpha_{j_2}|\beta_{j_1}\rangle & \langle\alpha_{j_2}|\beta_{j_2}\rangle & \cdots & \langle\alpha_{j_2}|\beta_{j_N}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\alpha_{j_N}|\beta_{j_1}\rangle & \langle\alpha_{j_N}|\beta_{j_2}\rangle & \cdots & \langle\alpha_{j_N}|\beta_{j_N}\rangle \end{bmatrix} $$

wyznacznik Slatera

(6a)

b) bozony $\to$ z (F4b) i (4) mamy, że

$$ {}_{+}^{nr}\left(\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\middle|\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_N}\right)_{+}^{nr} = \mathrm{per}\begin{bmatrix} \langle\alpha_{j_1}|\beta_{j_1}\rangle & \langle\alpha_{j_1}|\beta_{j_2}\rangle & \cdots & \langle\alpha_{j_1}|\beta_{j_N}\rangle \\ \langle\alpha_{j_2}|\beta_{j_1}\rangle & \langle\alpha_{j_2}|\beta_{j_2}\rangle & \cdots & \langle\alpha_{j_2}|\beta_{j_N}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\alpha_{j_N}|\beta_{j_1}\rangle & \langle\alpha_{j_N}|\beta_{j_2}\rangle & \cdots & \langle\alpha_{j_N}|\beta_{j_N}\rangle \end{bmatrix} \tag{6b} $$

3.1. Normowanie stanów N cz. nierozróżnialnych

a) fermiony: Tutaj $\langle\alpha_{j_l}|\alpha_{j_m}\rangle = \delta_{lm}$ zawsze, bo zakaz Pauliego załatwi, że w stanie $\left|\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\right)_{-}^{nr}$ nie pojawi się ten sam stan.

(!) $l, m \to$ indeksy po CZĄSTKACH, $l, m \in \{1, 2, \dots, N\}$
$j_l, j_m \to$ — // — STANACH, $j_l, j_m \in \{1, 2, \dots, k\}$

Dla fermionowego il. skalarnego

$$ {}_{-}^{nr}\left(\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\middle|\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\right)_{-}^{nr} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1 $$

Stan N nierozróżnialnych fermionów $\to$ zawsze unormowany

b) bozony: Tutaj $\langle\alpha_{j_l}|\alpha_{j_m}\rangle \neq \delta_{lm}$ w ogólności, bo

nie działa zakaz Pauliego.

(!) Tutaj mówimy o iloczynie skalarnym między stanami, który mają różne cząstki l i m, a NIE o il. skalarnym w ortonormalnej bazie stanów, np. $\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle = \delta_{12} = 0$, bo baza stanów jest ortonormalna zawsze. Chodzi o to, że dla bozonów może się np. zdarzyć, że 2. i 3. bozon będą w tym samym stanie, np. $j_2 = j_3 = 5$.

$$ \text{np.}\ \left|\alpha_1, \alpha_5, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_2, \alpha_3\right)_{+}^{nr} $$

Stan bozonowy trzeba zatem unormować

$$ {}_{+}^{nr}\left(\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\middle|\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\right)_{+}^{nr} = \sum_{P\in\Pi(N)} \langle \alpha_{j_1} | \beta_{j_{P(1)}}\rangle \cdot \ldots \cdot \langle \alpha_{j_N} | \beta_{j_{P(N)}}\rangle = $$

$$ = \prod_{j=1}^{k} (\underbrace{n_j}_{} !) $$

indeksy po STANACH $\rightarrow$ $j=1$
a NIE cząstkach

$\rightarrow$ liczba bozonowych cząstek w stanie $|\alpha_j\rangle$

$j \in \{1, 2, \dots, k\}$

np. $|\alpha\beta\gamma\gamma\beta\beta\delta)_{+}^{nr} = 1!\,3!\cdot 2!\cdot 1! = 2!\cdot 3!$

$$ \begin{array}{ccccc} & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{stan} & \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array} $$

unormowany $|\alpha\beta\gamma\gamma\beta\beta\delta\rangle_{+}^{nr} = \frac{1}{\sqrt{2!\,3!}} |\alpha\beta\gamma\gamma\beta\beta\delta)_{+}^{nr}$

Podsumowując, stan unormowany dla N cz. nierozróżnialnych to

$$ \boxed{ |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\rangle_{\pm}^{nr} = \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^{k}(n_j!)}} |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})_{\pm}^{nr} } \qquad (7) $$

Dla fermionów $n_j \in \{0,1\}$, więc wzór (7) też jest OK.