0. PRZYPOMNIENIE - BOZONY

(a) stan N nierozróżnialnych (nr) bozonów

$$|\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})_+^{nr} = \hat{S}_+ |\alpha^{(1)}_{j_1},\dots,\alpha^{(N)}_{j_N})_+^{r} =$$

→ cz. rozróżnialne

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P\in\Pi(N)} \hat{P} |\alpha^{(1)}_{j_1},\dots,\alpha^{(N)}_{j_N})_+^{r} = \tag{1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P\in\Pi(N)} |\alpha_{j_{P(1)}},\dots,\alpha_{j_{P(N)}})_+^{r}$$

$\in \mathcal{B}_N$ → podprzestrzeń dla N nierozróżnialnych bozonów

Mamy bazę k stanów dla pojedynczego bozonu: $\{|\alpha_i\rangle\}_{i=1,\dots,k}$

(b) normalizacja stanu

$$|\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\rangle_+^{nr} = \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^{k}(n_j!)}} |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})_+^{nr} \tag{2}$$

(c) operator symetryzacji - własności

$$\hat{P}\hat{S}_+ |\alpha^{(1)}_{j_1},\dots,\alpha^{(N)}_{j_N})^{r} = \hat{S}_+\hat{P} |\alpha^{(1)}_{j_1},\dots,\alpha^{(N)}_{j_N})^{r} = \hat{S}_+ |\alpha^{(1)}_{j_1},\dots,\alpha^{(N)}_{j_N})^{r} \tag{3}$$

1. OPERATORY KREACJI I ANIHILACJI (DLA BOZONÓW)

a) op. kreacji stanu $|\lambda\rangle \in \{|\alpha_i\rangle\}$, $\hat{a}^+_\lambda$

def:
$$\boxed{\hat{a}^+_\lambda |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})_+^{nr} = |\lambda, \alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})_+^{nr}} \tag{4a}$$

! $\mathcal{B}_N$ zmieniła się teraz na $\mathcal{B}_{N+1}$, zatem trzeba zdefiniować coś ogólniejszego

def: $F_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2 \oplus \dots$

$F_{\mathcal{B}}$ – przestrzeń Focka dla nierozróżnialnych bozonów

$\oplus$ – tzw. suma prosta przestrzeni

policzmy:

$$\rightarrow \hat{a}^+_\beta \hat{a}^+_\lambda |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ \overset{(4a)}{=} |\beta,\lambda,\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ \quad (5a)$$

$$\rightarrow \hat{a}^+_\lambda \hat{a}^+_\beta |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ \overset{(4a)}{=} |\lambda,\beta,\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ \quad (5b)$$

Z (1,3) mamy, że $\hat{P}|\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ = |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+$, zatem dla stanu nierozróżnialnych (i tylko wtedy) bozonów możemy sobie bezkarnie zamieniać pozycjami stany.

Wówczas

$$|\beta,\lambda,\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ = |\lambda,\beta,\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+$$

$$\downarrow (5a, 5b)$$

$$\hat{a}^+_\beta \hat{a}^+_\lambda = \hat{a}^+_\lambda \hat{a}^+_\beta$$

$$\downarrow$$

dla dowolnych β, λ $\quad \boxed{[\hat{a}^+_\lambda, \hat{a}^+_\beta] = 0} \quad$ (6a)

b) op. anihilacji – matematycznie $a_\lambda = (a^+_\lambda)^\dagger$, zatem od razu mamy, że

dla dowolnych β, λ $\quad \boxed{[\hat{a}_\lambda, \hat{a}_\beta] = 0} \quad$ (6b)

$\hat{a}_\lambda |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ = ?$ → czy w ogóle dla któregokolwiek j_i, $|\alpha_{j_i}\rangle = |\lambda\rangle$ (czy stan λ istnieje tam).

TAK

np. $\hat{a}_\lambda |\lambda\alpha\alpha\lambda\beta)^{nr}_+ =$
$= |\alpha\alpha\lambda\beta)^{nr}_+ + |\lambda\alpha\alpha\beta)^{nr}_+$

NIE

np. $\hat{a}_\lambda |\alpha\beta)^{nr}_+ = 0$

Zdefiniujmy stan:

$$|\alpha_{j_1},\dots\tilde{\alpha}_{j_i},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ = |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_{i-1}},\alpha_{j_{i+1}},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ \quad (*)$$

$\sim$ → stan, którego nie ma

i wówczas

$$\boxed{\hat a_\lambda |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ = \sum_{l=1}^{N} \delta_{\lambda,\alpha_{j_l}} |\alpha_{j_1},\dots,\tilde\alpha_{j_l},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+} \qquad (4b)$$

sprawdzamy po kolei wszystkie stany, czy operator $\hat a_\lambda$ ma co anihilować

→ policzmy $\hat a^+_\lambda \hat a_\beta |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ \overset{(4b)}{=} \hat a^+_\lambda \sum_{l=1}^{N} \delta_{\beta,\alpha_{j_l}} |\alpha_{j_1},\dots,\tilde\alpha_{j_l},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ =$

$$\overset{(4a)}{=} \sum_{l=1}^{N} \delta_{\beta,\alpha_{j_l}} |\lambda, \alpha_{j_1},\dots,\tilde\alpha_{j_l},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ \qquad (*_2)$$

→ policzmy $\hat a_\beta \hat a^+_\lambda |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ \overset{(4a)}{=} \hat a_\beta |\lambda, \alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ \overset{(4b)}{=}$

$$= \delta_{\beta,\lambda} |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ + \sum_{l=1}^{N} \delta_{\beta,\alpha_{j_l}} |\lambda, \alpha_{j_1},\dots,\tilde\alpha_{j_l},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ \overset{(*_2)}{=}$$

$$= \delta_{\beta,\lambda} |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ = \hat a^+_\lambda \hat a_\beta |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ =$$

$$= \left(\delta_{\beta,\lambda} + \hat a^+_\lambda \hat a_\beta\right) |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+$$

Podsumowując: $\boxed{\left[\hat a_\beta, \hat a^+_\lambda\right] = \delta_{\beta,\lambda}}$ (6c)

c) op. liczby cząstek $\hat a^+_\lambda \hat a_\lambda$

→ policzmy $\hat a^+_\lambda \hat a_\lambda |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ \overset{(*_2)}{=} \sum_{l=1}^{N} \delta_{\lambda,\alpha_{j_l}} |\lambda, \alpha_{j_1},\dots,\tilde\alpha_{j_l},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ =$

$$= \sum_{l=1}^{N} \delta_{\lambda,\alpha_{j_l}} |\alpha_{j_l}, \alpha_{j_1},\dots,\tilde\alpha_{j_l},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ \overset{(1,3)}{=}$$

→ wolno „żonglować" pozycją stanów

$$= \underbrace{\sum_{l=1}^{N} \delta_{\lambda,\alpha_{j_l}}}_{= n_\lambda \equiv \text{liczba bozonów w stanie } |\lambda\rangle} \underbrace{|\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+}_{\text{stan początkowy}}$$

Podsumowując: $\boxed{\hat a^+_\lambda \hat a_\lambda |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+ = n_\lambda |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N})^{nr}_+}$ (7)

np. $\hat{a}^{+}_{\lambda}\hat{a}_{\lambda}\,|\lambda,\alpha,\beta,\beta,\lambda,\alpha,\lambda)^{nr}_{+} = 3|\lambda,\alpha,\beta,\beta,\lambda,\alpha,\lambda)^{nr}_{+}$

2. NOTACJA STANÓW (unormowanych)

cząstkowa (st. znormalizowany) — RÓWNOWAŻNOŚĆ — stanowa (st. znormalizowany)

$$|\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\dots,\alpha_{j_N}\rangle^{nr}_{+} \Longleftrightarrow |n_1,n_2,\dots,n_k\rangle$$

α_{j_1}, α_{j_2}, …, α_{j_N}: 1., 2., …, 3. bozon

n_1, n_2, …, n_k: liczba bozonów w stanie: $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle \dots |\alpha_k\rangle$

$$\sum_{j=1}^{k} n_j = N \qquad (*_3)$$

np. Mamy $N=5$ bozonów i $k=7$ stanów.
Baza stanów to $\{|\alpha\rangle,|\beta\rangle,|\gamma\rangle,|\delta\rangle,|\varepsilon\rangle,|\mu\rangle,|\nu\rangle\}$

zapis cząstkowy — zapis stanowy

$$|\alpha,\alpha,\gamma,\delta,\mu\rangle^{nr}_{+} = \frac{1}{\sqrt{2!}}|\alpha,\alpha,\gamma,\delta,\mu)^{nr}_{+} \longleftrightarrow |2,0,1,1,0,1,0\rangle$$

dla α β γ δ ε μ ν

Oczywiście, $|n_1,\dots,n_k\rangle \in F_B$ (prz. Focka dla nierozróżnialnych bozonów). Przestrzeń F_B możemy rozbić na podprzestrzenie $F_B^{(j)}$ dla poszczególnych stanów $|\alpha_j\rangle$ ($j\in\{1,\dots,k\}$). Wówczas

$$|n_1,\dots,n_k\rangle = \underbrace{|n_1\rangle}_{\in F_B^{(1)}}\otimes\dots\otimes\underbrace{|n_k\rangle}_{\in F_B^{(k)}} \qquad // \quad F_B = F_B^{(1)}\otimes\dots\otimes F_B^{(k)}$$

Oczywiście, baza $F_B^{(j)}$ jest ortonormalna i zupełna, stąd, odpowiednio

$$\langle n_j|m_j\rangle = \delta_{n_j m_j} \qquad (8a)$$

$$\sum_{n_j=0}^{\infty}|n_j\rangle\langle n_j| = \hat{1}_j \in F_B^{(j)} \qquad (8b)$$

$\langle n_j|m_{j'}\rangle$ NIE MA SENSU gdy $j\neq j'$, bo mamy różne podprzestrzenie!

Tak samo dla całej przestrzeni F_B :

→ ortonormalność

$$\langle n_1,\dots,n_k | m_1,\dots,m_k\rangle = \langle n_1|m_1\rangle \cdot\ldots\cdot \langle n_k|m_k\rangle = \delta_{n_1 m_1}\cdot\ldots\cdot\delta_{n_k m_k} \qquad (9a)$$

→ zupełność

$$\sum_{n_1\dots n_k=0}^{\infty} |n_1,\dots,n_k\rangle\langle n_1,\dots,n_k| = \hat{1}_B \in \mathcal{F}_B \qquad (9b)$$

a) op. kreacji w stanie $|\alpha_m\rangle$, $\hat{a}^+_{\alpha_m} = \hat{a}^+_m$ → notacja do zapisu stanowego

Z (4a) mamy: $\hat{a}^+_{\alpha_m}|\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\rangle_+^{nr} = |\alpha_m,\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\rangle_+^{nr}$

normalizacja, (2)

$$\hat{a}^+_{\alpha_m}\sqrt{\prod_{j=1}^{k}(n_j!)}\,|\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\rangle_+^{nr} = \sqrt{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{k}(n_j!)}\,\sqrt{(n_m+1)!}\,|\alpha_m,\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\rangle_+^{nr}$$

$$\hat{a}^+_{\alpha_m}\sqrt{n_m!}\,|\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\rangle_+^{nr} = \sqrt{(n_m+1)!}\,|\alpha_m,\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\rangle_+^{nr}$$

$$\hat{a}^+_{\alpha_m}|\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\rangle_+^{nr} = \sqrt{n_m+1}\,|\alpha_m,\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\rangle_+^{nr}$$

zapis stanowy

$$\boxed{\hat{a}^+_m|n_1,\dots,n_m,\dots n_k\rangle = \sqrt{n_m+1}\,|n_1,\dots,n_m+1,\dots,n_k\rangle} \qquad (10a)$$

b) op. anihilacji w stanie $|\alpha_m\rangle$

$$\hat{a}_m|n_1,\dots,n_m,\dots n_k\rangle = \hat{1}_B\hat{a}_m|n_1,\dots,n_m,\dots n_k\rangle \overset{(9b)}{=}$$

$$= \sum_{n'_1\dots n'_k=0}^{\infty}|n'_1,\dots,n'_m,\dots,n'_k\rangle\langle n'_1,\dots,n'_m,\dots,n'_k|\hat{a}_m|n_1,\dots,n_m,\dots,n_k\rangle \overset{(10a)}{=}$$

$$= \sum_{n'_1\dots n'_k=0}^{\infty}|n'_1,\dots,n'_m,\dots,n'_k\rangle\langle n'_1,\dots,n'_m+1,\dots,n'_k|n_1,\dots,n_m,\dots,n_k\rangle\sqrt{n'_m+1} \overset{(9a)}{=}$$

$$= \sum_{n'_1\dots n'_k=0}^{\infty}|n'_1,\dots,n'_m,\dots,n'_k\rangle\,\delta_{n'_1 n_1}\cdot\ldots\cdot\delta_{n'_m+1,n_m}\cdot\ldots\cdot\delta_{n'_k n_k}\sqrt{n'_m+1}$$

i otrzymujemy

$$\boxed{\hat{a}_m \,|n_1, \dots, n_m, \dots n_k\rangle = \sqrt{n_m}\,|n_1, \dots, n_m - 1, \dots, n_k\rangle} \tag{10b}$$

Oczywiście, skoro $\hat{a}^{(+)}_m = \hat{a}^{(+)}_{\alpha_m}$, to równania (6) mają postać

$$[\hat{a}^+_n, \hat{a}^+_m] = 0 \tag{6a'}$$

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_m] = 0 \tag{6b'}$$

$$[\hat{a}_n, \hat{a}^+_m] = \delta_{nm} \tag{6c'}$$

→ op. lb. cząstek: $\hat{n}_m = \hat{a}^+_m a_m$

$$\hat{n}_m |n_1, \dots, n_m, \dots, n_k\rangle = \hat{a}^+_m a_m |n_1, \dots, n_m, \dots, n_k\rangle \overset{(10b)}{=}$$

$$= \hat{a}^+_m \sqrt{n_m}\,|n_1, \dots, n_m - 1, \dots, n_k\rangle \overset{(10a)}{=}$$

$$= \sqrt{n_m}\sqrt{n_m - \cancel{1} + \cancel{1}}\,|n_1, \dots, n_m - \cancel{1} + \cancel{1}, \dots, n_k\rangle =$$

$$= n_m |n_1, \dots, n_m, \dots, n_k\rangle$$

def: operator $\hat{N}$ całkowitej liczby cząstek:

$$\boxed{\hat{N} = \sum_{m=1}^{k} \hat{n}_m = \sum_{m=1}^{k} \hat{a}^+_m \hat{a}_m} \tag{11}$$

c) rozmaite stany

- stan podstawowy (próżnia)

$$|0\rangle_{vac} = |0_1, \dots, 0_k\rangle$$

- stan jednocząstkowy (bozon w stanie $|\alpha_i\rangle$)

$$\hat{a}^+_i |0\rangle_{vac} \overset{(10a)}{=} |0_1, \dots, 1_i, \dots, 0_k\rangle \quad (*_4)$$

- stany dwucząstkowe

np. $$\frac{1}{\sqrt{2!}}\left(\hat{a}^+_i\right)^2 |0\rangle_{vac} \overset{(*_4)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}^+_i |0_1, \dots, 1_i, \dots, 0_k\rangle \overset{(10a)}{=}$$

⚠ konieczna normalizacja

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\cancel{\sqrt{2}}\,|0_1, \dots, 2_i, \dots, 0_k\rangle$$

$$\hat{a}^+_i \hat{a}^+_n |0\rangle_{vac} = |0_1, \dots, 1_i, \dots, 1_n, \dots, 0_k\rangle$$

- stan wielocząstkowy

$$\boxed{|n_1, \dots, n_k\rangle = \frac{(\hat{a}_1^+)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \cdot \ldots \cdot \frac{(\hat{a}_k^+)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |0\rangle_{vac}} \qquad (12)$$

Teraz rozważmy 1 stan, $|\alpha_m\rangle$. Wówczas

$$|n_m\rangle = \frac{(\hat{a}_m^+)^{n_m}}{\sqrt{n_m!}} |0\rangle_{vac}, \quad |n_m+1\rangle = \frac{(\hat{a}_m^+)^{n_m+1}}{\sqrt{(n_m+1)!}} |0\rangle_{vac}$$

$$\boxed{|n_m+1\rangle = \frac{\hat{a}_m^+}{\sqrt{n_m+1}} |n_m\rangle} \qquad (13)$$