0. PRZYPOMNIENIE

Mamy N cząstek i k możliwych stanów (z bazy $\{|\alpha_i\rangle\}$)

a) stany Focka

zapis cząstkowy

$$|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle \longleftrightarrow |\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_N}\rangle_+^{nr}$$

lb. bozonów w stanie $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots, |\alpha_k\rangle$

stan 1., 2., …, 3. bozonu

$$\sum_{j=1}^{k} n_j = N \quad (*_1)$$

oba stany są unormowane

b) op. kreacji, anihilacji i liczby cząstek

Stan Focka, $k=1$

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \quad (1a)$$
$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \quad (1b)$$
$$\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle \quad (1c)$$

analogicznie dla $k>1$

Reguły komutacji

$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^+, \hat{a}^+] = 0 \quad (2a) \qquad [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \quad (2b)$$

Dla $k>1$:

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_l] = [\hat{a}_j^+, \hat{a}_l^+] = 0 \quad (3a) \qquad [\hat{a}_j, \hat{a}_l^+] = \delta_{jl} \quad (3b)$$

1. HAMILTONIAN (układ N cząstek nieoddziałujących i k stanów dla pojedynczej cząstki)

→ dla l-tej cząstki

$$\hat{H}^{(l)}|\alpha_j^{(l)}\rangle = E_j^{(l)}|\alpha_j^{(l)}\rangle \quad (4)$$

energia l-tej cząstki dla stanu $|\alpha_j\rangle$

→ całkowity

$$\hat{H}_{tot} = \sum_{l=1}^{N} \hat{H}^{(l)} = \sum_{l=1}^{N} \hat{1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \hat{1}^{(l-1)} \otimes \hat{H}^{(l)} \otimes \hat{1}^{(l+1)} \otimes \dots \otimes \hat{1}^{(N)} \quad (5)$$

skrócony zapis

dokładny zapis

$$\hat{H}_{tot}|n_1,\dots,n_k\rangle = \sum_{j=1}^{k} n_j E_j |n_1,\dots,n_k\rangle \quad (6)$$

zał: $E_j^{(1)} = \dots = E_j^{(N)} = E_j$ $(*)_2$

2. OPERATOR JEDNOCZĄSTKOWY $t^{(l)}$ dla l-tej cząstki

np. $\hat{t}^{(l)} = [\hat{p}^{(l)}]^2/2m_l$, $\hat{t}^{(l)} = V(\hat{x}^{(l)})$

Elementy macierzowe op. $\hat{t}^{(l)} \in \mathcal{H}_l$ w bazie $\mathcal{H}_l$ to

$$\hat{t}^{(l)} = \mathbb{1}^{(l)} \cdot \hat{t}^{(l)} \cdot \mathbb{1}^{(l)} = \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j^{(l)}\rangle\langle\alpha_j^{(l)}| \, \hat{t}^{(l)} \sum_{j'=1}^{k} |\alpha_{j'}^{(l)}\rangle\langle\alpha_{j'}^{(l)}| =$$

$$= \sum_{j,j'=1}^{k} |\alpha_j^{(l)}\rangle\langle\alpha_{j'}^{(l)}| \underbrace{\langle\alpha_j^{(l)}|\hat{t}^{(l)}|\alpha_{j'}^{(l)}\rangle}_{=t_{jj'}} \quad (7)$$

! NIE ZALEŻY od l, bo cząstki są nierozróżnialne

a) układ N cząstek

skrócony zapis (por. (5))

$$\hat{T} = \sum_{l=1}^{N} \hat{t}^{(l)} \overset{(7)}{=} \sum_{l=1}^{N} \sum_{j,j'=1}^{k} |\alpha_j^{(l)}\rangle\langle\alpha_{j'}^{(l)}| t_{jj'} = \sum_{j,j'=1}^{k} \hat{T}_{jj'} \quad (8)$$

→ policzmy $\hat{T}_{jj'}|n_1,\dots,n_k\rangle$

(8), normalizacja st. w zapisie cząstkowym

$$\hat{T}_{jj'}|n_1,\dots,n_k\rangle = \hat{T}_{jj'}|\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\rangle_+^{nr} =$$

$$= \sum_{l=1}^{N} t_{jj'} |\alpha_j^{(l)}\rangle\langle\alpha_{j'}^{(l)}| \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k} n_i!}} |\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}\rangle_+^{nr} =$$

kombinacja stanów cz. rozróżnialnych

$$= \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k} n_i!}} \sum_{l=1}^{N} t_{jj'} |\alpha_j^{(l)}\rangle\langle\alpha_{j'}^{(l)}| \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P\in\Pi(N)} |\alpha_{j_{P(1)}}^{(1)},\dots,\alpha_{j_{P(N)}}^{(N)}\rangle^{r} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{i=1}^{k} n_i!}} t_{jj'} \sum_{P\in\Pi(N)} \sum_{l=1}^{N} |\alpha_j^{(l)}\rangle\langle\alpha_{j'}^{(l)}| \left(|\alpha_{j_{P(1)}}^{(1)},\dots,\alpha_{j_{P(l)}}^{(l)},\dots,\alpha_{j_{P(N)}}^{(N)}\rangle^{r} \right) =$$

ortonormalność

$$= \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{i=1}^{k} n_i!}} t_{jj'} \sum_{l=1}^{N} \sum_{P\in\Pi(N)} \delta_{j', j_{P(l)}} \left| \alpha^{(1)}_{j_{P(1)}}, \ldots, \alpha^{(l-1)}_{j_{P(l-1)}}, \alpha^{(l)}_{j}, \alpha^{(l+1)}_{j_{P(l+1)}}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_{P(N)}} \right)^{\sim} = \ldots$$

→ stary stan $|\alpha^{(1)}_{j_{P(1)}}, \ldots, \alpha^{(l)}_{j_{P(l)}}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_{P(N)}})^{\sim}$ tak jak $|\alpha^{(1)}_{j_1}, \ldots \alpha^{(N)}_{j_N})^{\sim}$ jak i stan $|\alpha^{(1)}_{j_{P(1)}}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_{P(N)}})^{n\sim}_{+}$ zawiera n_j i $n_{j'}$ bozonów o stanie odpowiednio $|\alpha_j\rangle$ i $|\alpha_{j'}\rangle$.

→ fakt: $\sum_{P\in\Pi(N)} f(P) = \sum_{m=1}^{N} \sum_{\substack{P\in\Pi(N)\\ P(l)=m}} f(P)$ dla dowolnego $l \in \{1, \ldots, N\}$

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{i=1}^{k} n_i!}} t_{jj'} \sum_{l=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \sum_{\substack{P\in\Pi(N)\\ P(l)=m}} \delta_{j', j_{P(l)}} \left| \alpha^{(1)}_{j_{P(1)}}, \ldots, \alpha^{(l-1)}_{j_{P(l-1)}}, \alpha^{(l)}_{j}, \alpha^{(l+1)}_{j_{P(l+1)}}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_{P(N)}} \right)^{\sim} =$$

wyrzucamy deltę przed sumę po permutacjach, bo przestała od nich zależeć

$$= \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{i=1}^{k} n_i!}} t_{jj'} \sum_{l=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \sum_{\substack{P\in\Pi(N)\\ P(l)=m}} \delta_{j', j_m} \left| \alpha^{(1)}_{j_{P(1)}}, \ldots, \alpha^{(l-1)}_{j_{P(l-1)}}, \alpha^{(l)}_{j}, \alpha^{(l+1)}_{j_{P(l+1)}}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_{P(N)}} \right)^{\sim} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{i=1}^{k} n_i!}} t_{jj'} \underbrace{\sum_{l=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \delta_{j', j_m}} \sum_{\substack{P\in\Pi(N)\\ P(l)=m}} \left| \alpha^{(1)}_{j_{P(1)}}, \ldots, \alpha^{(l-1)}_{j_{P(l-1)}}, \alpha^{(l)}_{j}, \alpha^{(l+1)}_{j_{P(l+1)}}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_{P(N)}} \right)^{\sim} = \ldots$$

Ten człon przestał już zależeć od tego, co po jego prawej stronie!

Mamy przelecieć po indeksach $j_1, \ldots, j_N$ (czyli dla starego stanu i policzyć, ile razy powtórzy się tam stan $|\alpha_{j'}\rangle$ → odp.: $n_{j'}$ razy

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{i=1}^{k} n_i!}} t_{jj'} \sum_{l=1}^{N} n_{j'} \sum_{\substack{P\in\Pi(N)\\ P(l)=m}} \left| \alpha^{(1)}_{j_{P(1)}}, \ldots, \alpha^{(l-1)}_{j_{P(l-1)}}, \alpha^{(l)}_{j}, \alpha^{(l+1)}_{j_{P(l+1)}}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_{P(N)}} \right)^{\sim} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{i=1}^{k} n_i!}} t_{jj'} n_{j'} \underbrace{\sum_{l=1}^{N} \sum_{\substack{P\in\Pi(N)\\ P(l)=m}}} \underbrace{\left| \alpha^{(1)}_{j_{P(1)}}, \ldots, \alpha^{(l-1)}_{j_{P(l-1)}}, \alpha^{(l)}_{j}, \alpha^{(l+1)}_{j_{P(l+1)}}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j_{P(N)}} \right)^{\sim}} = \ldots$$

nowy stan, w którym stan l-tej cząstki zamieniono z $|\alpha_{j'}\rangle$ na $|\alpha_j\rangle$.

$$\sum_{l=1}^{N} \sum_{\substack{P\in\Pi(N)\\ P(l)=m}} f(P) = \sum_{P\in\Pi(N)} f(P)$$

W tym stanie
$$\left.\begin{aligned} n_{j'} &\leftarrow n_{j'} - 1 \\ n_j &\leftarrow n_j + 1 \end{aligned}\right\} (*_3)$$

ta suma generuje każdą możliwą permutację dla nowego zestawu stanów

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{N!\prod_{i=1}^{k} n_i!}}\, t_{jj'}\, n_{j'} \sum_{Q\in\Pi(N)} \left|\alpha^{(1)}_{j'_{Q(1)}}, \ldots, \alpha^{(l)}_{j'_{Q(l)}}, \ldots, \alpha^{(N)}_{j'_{Q(N)}}\right)^{r} = \ldots$$

zwijamy do stanu cz. nierozróżnialnych

$$\to \underbrace{j'_1, \ldots, j'_N}_{} \in \{1, \ldots, k\}$$

nowy zbiór indeksów, który powstał ze starego zbioru $j_1, \ldots, j_N$ poprzez zamianę $|\alpha_j\rangle$ na $|\alpha_{j'}\rangle$.

$$\ldots = \frac{t_{jj'}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k} n_i!}}\, n_{j'} \left|\alpha_{j'_1}, \ldots, \alpha_{j'_N}\right)^{nr}_{+} =$$

nowy stan unormowany, por. (*$_3$)

$$= \frac{t_{jj'}\, n_{j'}}{\sqrt{\cancel{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j\\ i\neq j'}}^{k} n_i!}}\,\sqrt{n_{j'}!}\sqrt{n_j!}} \sqrt{\cancel{\prod_{\substack{g=1\\ g\neq j\\ g\neq j'}}^{k} (n_g!)} \cdot (n_{j'}-1)!\,(n_j+1)!}\; \left|\alpha_{j'_1}, \ldots, \alpha_{j'_N}\right\rangle^{nr}_{+} =$$

$$= \frac{t_{jj'}\, n_{j'} \sqrt{(n_{j'}-1)!}\sqrt{(n_j+1)!}}{\sqrt{n_{j'}!}\sqrt{n_j!}} \left|\alpha_{j'_1}, \ldots, \alpha_{j'_N}\right\rangle^{nr}_{+} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{n_{j'}}} \qquad \sqrt{n_j+1}$$

$$= t_{jj'}\sqrt{n_{j'}}\sqrt{n_j+1}\left|\alpha_{j'_1}, \ldots, \alpha_{j'_N}\right\rangle^{nr}_{+} =$$

notacja Focka dla tego nowego stanu

tu zał.: $j' < j$, ale równie dobrze można przyjąć, że $j' > j$

$$\overset{(1)\text{ dla } k>1}{=} t_{jj'}\sqrt{n_{j'}}\sqrt{n_j+1}\left|n_1, \ldots, n_{j'}-1, \ldots, n_j+1, \ldots, n_k\right\rangle =$$

$$= t_{jj'}\, \underbrace{\hat{a}^{+}_{j}\, \hat{a}_{j'}}_{} \left|n_1, \ldots, n_k\right\rangle$$

⚠ Dla $j \neq j'$ kolejność nie ma znaczenia (por. (3b)), ale gdy $j = j'$, to NAJPIERW działamy op. anihilacji (zad. 3. lista 1)

Podsumowując, op. $\hat{T}_{jj'}$ ma postać

$$\boxed{\hat{T}_{jj'} \overset{(8)}{=} t_{jj'} \sum_{l=1}^{N} |\alpha^{(l)}_j\rangle\langle\alpha^{(l)}_{j'}| = t_{jj'}\, \hat{a}^{+}_{j}\, \hat{a}_{j'}} \qquad (9)$$

dla każdego j, j'.

3. WZORY PRZYDATNE DO LISTY 1

Niech $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \to$ operatory, $c \to$ stała. Wówczas

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] \tag{10a}$$

$$[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [A, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}] \tag{10b}$$

$$[\hat{A}, c\hat{B}] = c[\hat{A}, \hat{B}] \tag{10c}$$

Wzór Bakera-Campbella-Hausdorffa (BCH)

$$\boxed{e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \underbrace{\frac{1}{12}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{12}[\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \ldots}}} \tag{11}$$

Wyższe rzędy odpadają, gdy $[\hat{A}, \hat{B}]$ to liczba i wówczas wzór BCH upraszcza się do formuły Weyla-Glaubera:

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} \tag{11a}$$